Exercice : Démontrer les inégalités suivantes :

1) $arcsin\, x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ si $0 < x < 1$.

2) $arctan\, x > \frac{x}{1+x^2}$ si $x > 0$.

(indication: on appliquera le th. des accroissements finis pour $arcsin\, x$ et $arctan\, x$.)

1) Appliquons le théorème des accroissements finis sur $[0, x]$ à la fonction :

$$x \longmapsto \text{Arc Sin } x$$

Nous avons qu'il existe un point c de $]0, x[$ tel que

$$\text{Arc Sin } x - \text{Arc Sin } 0 = (x-0)\,\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\,.$$

or $0 < c < x$, d'où

$$1 - c^2 > 1 - x^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

d'où $\text{arc Sin } x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, si $0 < x < 1$.

2) Théorème des acc. finis sur $[0, x]$ à la fonction $x \longmapsto \text{arc tg } x$.

$$\text{Arc tg } x - \text{Arc tg } 0 = (x-0)\,\frac{1}{1+c^2}\,.$$

Comme $0 < c < x$. donc $1 + c^2 < 1 + x^2$ et $\frac{1}{1+c^2} > \frac{1}{1+x^2}$

d'où $\text{Arc tg } x > \frac{x}{1+x^2}$; si $x > 0$

Exercice : Prouver les inégalités suivantes:

i) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $sin\, x \leq x$. ii) $\forall x \in [0, +\infty[$, $arctan\, x \geq \frac{x}{1+x^2}$.

iii) $\forall x > -1$, $\frac{x}{1+x} \leq ln(1+x) \leq x$. iv) $\forall x \in [0,1]$, $x + \frac{x^3}{3} \leq tan\, x \leq x + \frac{8}{3}x^3$.

v) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}$, $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \leq sin\, x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

vi) $\forall x \in [0,1]$, $1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e$.

i) Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

T.A.F. $\exists c \in [0, x]$ tq $\sin x - \sin 0 = (x-0)\sin' c$

d'où $\sin x = x \cos c \Rightarrow \sin x \leq x$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ii) Déjà faite.

iii) T.A.F. $\exists\, c \in]0, x[$. tel que $\log(x+1) = \frac{x}{1+c}$

d'où si $x > 0$, alors $0 < c < x$ et

$$\frac{x}{1+x} \leq \frac{x}{1+c} \leq x.$$

de même si $x < 0$.

(iv) $\exists\, c \in]0, x[\subset [0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \sin^{(8)} c .$$

et $\sin^{(8)}(c) = \sin c \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

(v) $\exists\, c \in]0, x[\subset [0,1]$.

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \operatorname{tg}^{(5)}(c) .$$

(vi) $\exists c \in]0, x[\subset [0,1]$; $e^x = 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$

et $0 < e^c < e$.

Exercice : Trouver la position de la courbe par rapport à la tangente en x_0, pour les fonctions suivantes:

i) $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad ii)\ g(x) = \tan x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$

i) On appliquons la formule de Taylors à l'ordre 1.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\exists\, c \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ tel que

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{3} + (x - \frac{\pi}{3})\sin'\frac{\pi}{3} + \frac{(x-\frac{\pi}{3})^2}{2}\sin''c \ .$$

d'où $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3}) - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{3})^2 \cos c.$

d'où $\sin x - \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})\right)}_{\text{l'éq tangente}} = -\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{3})^2 \cos c \leq 0 \ ; \ c \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[.$

d'où La courbe de sin est au dessous de sa tg en $\frac{\pi}{3}$.

ii) Formule de Taylors à l'ordre 1.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\exists\, c \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ tel que.

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + (x - \frac{\pi}{4})\operatorname{tg}'\frac{\pi}{4} + \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2}\operatorname{tg}''(c)$$

d'où $\operatorname{tg} x = 1 + (x - \frac{\pi}{4}) \cdot 2 - \frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2}\frac{\sin 2c}{\cos^4 c}.$

d'où $\operatorname{tg} x - \left(1 + 2(x - \frac{\pi}{4})\right) = -\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2}\frac{\sin 2c}{\cos^4 c} \leq 0$

d'où La courbe de tg est au dessous de sa tangente en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice :

1) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto ln(1+x)$ déterminer la limite de suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^n}{n}$.

2) De meme, utiliser la fonction $x \mapsto e^x$ pour déterminer la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}$.

1) D'après la formule de Taylor - Lagrange

on $\exists c \in]0,x[$ tel que :

$$\log(1+x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

d'où

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} \leq \log(1+x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \frac{c^{n+1}}{n+1}$$

Par Continuité : $\ln x = 1$. ona :

$$0 \leq \log 2 - u_n \leq \frac{c^n}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad ; \quad 0 < c < 1 .$$

d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \log 2$.

2) Taylor Lagrange : $\exists c \in]0,x[$ tel que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

d'où

$$1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \leq 1 + x + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^c$$

Pour $x = -1$, $\lim_{n \to +\infty} v_n = e^{-1}$.

Exercice : Soit $\alpha \in \mathbb{N} \in]0,1[$. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^\alpha - n^\alpha \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire un équivalent simple de $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ lorsque $n \to +\infty$.

Pour $\alpha \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$x \longmapsto f(x) = x^\alpha$$

est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$,

donc T.A.F. $\exists c \in]n, n+1[$; $(n+1)^\alpha - n^\alpha = \alpha c^{\alpha-1}$

d'où les inégalités annoncées puisque sur $]n, n+1[$, la fonction $t \longmapsto t^{\alpha-1}$ est décroissante.

Additions membre à membre ces inégalités on obtient :

$$\alpha \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{(p+1)^{1-\alpha}} \leq n^\alpha \text{ et } \alpha \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \geq (n+1)^\alpha - 1$$

d'où $\dfrac{(n+1)^\alpha}{\alpha} - \dfrac{1}{\alpha} \leq \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq \frac{n^\alpha}{\alpha}$.

Divisons par n^α et passons à la limite lorsque n tend vers l'infini

On a : $n^\alpha \longrightarrow +\infty$, et $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \longrightarrow 1$.

Il reste : $\dfrac{1}{\alpha} \leq \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha}$.

d'où $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{1-\alpha}} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$ $\quad (n \longrightarrow +\infty)$

Exercice : Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x > 0,\ \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

2) $\forall x \in]0, 2\pi[,\ \sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

1) Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 2 à la fonction $x \longmapsto \log(1+x)$ sur $[0,x]$, $\exists c \in]0,x[$ on a $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{1+c}\right)^2$

or $0 < c < x$ d'où $\frac{1}{(1+x)^2} < \frac{1}{(1+c)^2} < 1$.

d'où $\log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$.

2) On applique la formule de Taylor à l'ordre 3 à la fonction $x \longmapsto \sin x$ sur $[0,x]$, $\exists c \in]0,x[$

on a : $\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos c$

d'où $\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{6}(1 - \cos c)$.

Comme $c \in]0, 2\pi[$ et $1 - \cos c \geq 0$, on a $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Exercice :

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x$.

2) En déduire que, pour $0 \leq k < 1$, la suite :

$$u_n = (1+k)(1+k^2)...(1+k^n)\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

est Convergente.

1) Appliquons la formule de Taylor à e^x, ci-dessus, sur $[0,x]$, il vient : $\exists c \in]0,x[$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c.$$

$0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c < e^x$

D'où $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} e^c \geq 0$.

2) Appliquons le résultat ci-dessus avec $x = k^p$. n

trouve $\forall p \in \mathbb{N},\ 1 \leq 1 + k^p < e^{k^p}$

et par récurrence on a

$$1 \leq u_n = (1+k)\cdot(1+k^2)\cdots(1+k^n) \leq e^{k+k^2+k^3+\cdots+k^n}$$

or $k + k^2 + \cdots + k^n = k\,\frac{1-k^n}{1-k} \leq \frac{k}{1-k}$.

puisque $0 \leq k < 1$. D'où par la croissance de $x \mapsto e^x$,

$$e^{k+k^2+\cdots+k^n} \leq e^{\frac{k}{1-k}}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\forall k \in [0,1[)$, $1 \leq u_n \leq e^{\frac{k}{1-k}}$.

$u_n > 0$, et $\forall n \geq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + k^{n+1} \geq 1 \Rightarrow (u_n)$ ↑

$\Leftarrow (u_n)$ est ↑ et majorée donc converge.

Exercice Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ln(ln(x))$.

1) Calculer f' et f''.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 2,\ \frac{1}{(n+1)ln(n+1)} \leq ln(ln(n+1)) - ln(ln(n)) \leq \frac{1}{nln(n)}$.

3) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n>3}$ définie par

$$u_n = \frac{1}{3ln\,3} + \frac{1}{4ln\,4} + ... + \frac{1}{nln\,n}.$$

1) f est 2 fois dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a $\forall x \in]1,+\infty[$

$f'(x) = \frac{1}{x \log x}$ et $f''(x) = -\frac{(1+\log x)}{(x \log x)^2} < 0$.

2) Si $b > a > 1$, alors T.A.F. $\exists c \in]a,b[$.

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) = \frac{b-a}{c \log c}.$$

Pour $a = n$ et $b = n+1$, $n \geq 2$.

$$\log(\log(n+1)) - \log(\log n) = \frac{1}{c_n \log c_n}$$

avec $n < c_n < n+1$

Comme $f'' < 0 \Longrightarrow f'$ est décroissante.

et $\frac{1}{(n+1)\log(n+1)} < \frac{1}{c_n \log c_n} < \frac{1}{n \log n}$

3) Pour $n \geq 3$, on a

$$\log(\log(n+1)) - \log(\log n) \leq \frac{1}{n \log n} \leq \log(\log n) - \log(\log(n-1))$$

d'où $\log(\log(n+1)) - \log(\log 3) \leq u_n \leq \log(\log n) - \log(\log 2)$

$\log(\log(n+1)) \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$

d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

□